Aufgabe 1 *(Minimalflächensystem)*
Der Flächeninhalt von $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt, ist

$$\mathcal{A}(f) = \int_\Omega \sqrt{\det g} \quad \text{wobei } g_{\alpha\beta} = \langle \partial_\alpha f, \partial_\beta f \rangle.$$

Zeigen Sie: ist zusätzlich $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Immersion, so gilt für alle $\phi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{A}(f + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = -\int_\Omega \langle \Delta_g f, \phi \rangle \sqrt{\det g} \quad \text{mit } \Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_\alpha (g^{\alpha\beta} \sqrt{\det g} \partial_\beta f).$$

Aufgabe 2 *(p-harmonische Funktionen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Die p-Energie von $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist definiert durch

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |Du|^p \quad \text{mit } 1 < p < \infty.$$

Berechnen Sie die erste Variation des Funktionals $\mathcal{E}(u)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 31.10.2011 vor der Vorlesung.